工科数学分析上册

课后习题解答

作者：仲英学辅

2020 年 9月 1日

仲英书院学业辅导中心

Zhong Ying Xue Fu

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

作品信息

- **标题**：工科数学分析上册 - 课后习题解答
- **作者**：仲英学辅
- **校对排版**：电气86刘菁锐、能动B81梁佳佳
- **出品时间**：2020 年 9月 1日
- **总页数**：32

前言

编写人员：金融91赵佳明、ACCA91晋嘉睿、力学理81叶义晨、电气97宋旭晖、软件92杨兆瑞、自动化91李原原

排版人员：医电91富心桥、电气86刘菁锐、能动B81梁佳佳

感谢学业辅导中心各位工作人员与志愿者的努力工作，使本资料可以按时完工。由于编者们的能力与精力限制，以及本资料是仲英学业辅导中心采用LaTeX排版，难免有错误之处。如果同学们在本资料中发现错误，请联系仲英学业辅导中心：XJTUzyxuefu@163.com，我们将在修订时予以更正。

从第3周开始，每晚19:30-21:30，学辅志愿者在东21舍118学辅办公室值班，当面为学弟学妹们答疑。

同时，我们也有线上答疑平台——学粉群。

19级学粉群：902493560，756433480;

20级学粉群：598243135, 1137961185.

期中考试与期末考试前，我们还会举办考前讲座。学辅还有新生专业交流会，转专业交流会，英语考试讲座等活动，消息会在学粉群和公众号上公布，欢迎同学们参与。

仲英书院学业辅导中心

2020年9月1日

学粉群 6.0
QQ 群号：598243135

学粉群 6.1
QQ 群号：1137961185

微信公众号
仲英学业辅导中心及薪火工作室

目录

第一章 章末习题 1
第二章 章末习题 9
第三章 章末习题 18
第四章 章末习题 29

第一章　章末习题

1、选择题

(1)B

由数列收敛定义可知对于 $\forall\varepsilon > 0\quad \exists N \in N^{+}, n > N$ 都满足 $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$，则数列收敛于 a，所以如果数列收敛，则有无穷多个 x_n满足 $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$。而无穷不能代表所有。

举例$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n\text{为奇数} \\ 1 & n\text{为偶数} \end{cases}$ 满足对于 $\forall\varepsilon$无穷个 $x_n \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$但无法保证数列收敛于0。综上可知，前不能推后，后能推前。所以是必要但不充分的条件。

★ 提一下一个与此题关系不大却很重要的知识点!!!我们中学阶段学的是充分和必要条件，但是在做大学证明题的时候要说明充分性和必要性，很多人把这两者搞混。这里说一下什么是充分性和必要性。**充分性是指由条件⇒结论，而必要性就是反过来**。

我们来实际应用一下：

证明“A的充要条件是B” 充分性：B ⇒A，必要性A ⇒ B

证明“A是B的充要条件” 充分性：A ⇒ B，必要性B⇒ A

(2)D

当 c_n和 a_n均存在极限的时候，才满足夹逼定理的条件， b_n才会存在极限。

举个反例，$c_n = n + \frac{1}{n}$，$a_n = n - \frac{1}{n}$，$b_n = n$，满足题干中的条件，但是b_n不存在极限。

(3)D

该题为1998年数二考研题，对于这道题，D容易看出是最难以挑出毛病的，剩下三个选项需举出反例，以下反例虽对于刚入门高数的人来说确实难想到，但是学完所有知识后，是很容易列举出的。

A：如果$x_n = n$，$y_n = \frac{1}{n^2}$，此时x_n发散，y_n收敛，故A不正确

B：取$x_n=[1+(-1)^n]n$，$y_n=[1-(-1)^n]n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，且$\{x_n\}$和$\{y_n\}$均无界，故B不正确

C：取$x_n=\frac{1}{n^2}$，$y_n=n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，且$\{x_n\}$有界，但$\{y_n\}$不是无穷小，故C不正确

D：由$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$知，$\{x_ny_n\}$为无穷小，故当$\{\frac{1}{x_n}\}$为无穷小时，$y_n=\{(x_ny_n)\cdot\frac{1}{x_n}\}$为无穷小，故正确，

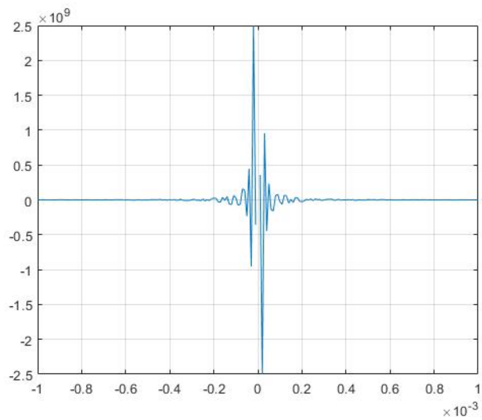
(4)D

A：错误，反例：若$\{x_n\}$为1，0，3，0，5,⋯⋯，$\{y_n\}$为0，2，0，4，0，6,⋯⋯

B：错误：反例取$x_n=n\sin\frac{1}{n}$，$y_n=\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}$，必有无界函数，但不一定趋于无穷大

C：错误，假设$x_n=\frac{1}{n^2}$有界，$y_n=n$无界，则$x_ny_n=\frac{1}{n}$有界

D：正确



(5)D

取$x=\frac{1}{2n\pi},x=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$可知极限为0和无穷、因此函数震荡，无界但不趋于无穷

(6)D

A：错误，若$\varphi(x)=\operatorname{sgn}x$，$f(x)=e^x$，则$\varphi(f(x))\equiv 1$无间断点

B：错误，若$\varphi(x)=\begin{cases}1 & ,x\in Q\\ -1 & ,x\in R\backslash Q\end{cases}$，则$[\varphi(x)]^2$无间断点

C：错误，例子同B，$\varphi(x)=\begin{cases}1 & ,x\in Q\\ -1 & ,x\in R\backslash Q\end{cases}$，$f(x)=x^2$，则$f(\varphi(x))$无间断点

D：正确，反证法，若$\frac{\varphi(x)}{f(x)}$无间断点，因为$f(x)$连续，则$\varphi(x)=\frac{\varphi(x)}{f(x)}\cdot f(x)$也连续，与已知矛盾。

(7)B

当$x\to 0^+$时，$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{4}{x}}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1$；

当$x\to 0^+$ 时，$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}=\frac{2+0}{1+0}=2$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^-}-\frac{\sin x}{x}=-1$。所以$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，x=0是可去间断点。

(8)D

由$\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=0$得，b<0。当a<0是必存在一点使得分母$a+e^{bx}=0$，此时出现函数的一个间断点。所以$a\geqslant 0$。所以选D

(9)C

可去间断点是在分子分母都为0的时候取到，所以x=1时分母也为0，所以b=-e。

跳跃间断点在x=0时，函数两边极限不一致取到，但要保证分子不为0。所以$a\neq 0$。故选C

2、将$f(x)=\sin x$中的x替换成$\varphi(x)$得到$f(\varphi(x))=\sin\varphi(x)=1-x^2$，两边取反函数得到$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$。正弦函数值域为[-1,1],所以$-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1$，解得定义域为[$-\sqrt{2}$,$\sqrt{2}$]

3、(1)从题目中很明显看出是进行放缩，再通过夹逼准则求得极限，多个分式相加，放缩的目标是将分母统一。

$$\frac{1+\cdots\cdots+n}{n^2+n+1}\leqslant\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\leqslant\frac{1+\cdots+n}{n^2+n+n}$$

由等差数列求和公式得

$$\frac{n^2+n}{2(n^2+n+n)}\leqslant\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\leqslant\frac{n^2+n}{2(n^2+n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2(n^2+n+n)}\leqslant \text{原式}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2(n^2+n+1)}$$

上下同时除以n^2得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n})}\leqslant 原式 \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}$$

故原式=$\frac{1}{2}$

(2) 方法一：看到$e^{\frac{1}{n}}$和 $e^{\frac{1}{n+1}}$是同一个函数e^x变化得到，故可以考虑用拉格朗日中值定理，

在$[e^{\frac{1}{n}}$,$e^{\frac{1}{n+1}}]$上存在一点ξ使得$e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n+1}}=(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})e^{\xi}$

代入原式化简得$\frac{n^2}{n(n+1)}e^{\xi}$，上下同时除以$n^2$得$\frac{1}{1+\frac{1}{n}}e^{\xi}$，当n趋近于无穷时，$\xi$趋近于0，原式=1

方法二：利用$e^x-1\sim x$的等价无穷小来做，注意指数部分的x一定要趋近于0，遇到诸如$e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n+1}}$这样的式子，把$e^{\frac{1}{n+1}}$提出来是比较常用的方法.提出后得到$n^2e^{\frac{1}{n+1}}(e^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}-1)$，等价无穷小代换得到$\frac{n^2}{n(n+1)}e^{\frac{1}{n+1}}$，上下同除$n^2$，将n趋于无穷带入得到原式=1

(3)看到分子是两个根式相减，要对其进行分子有理化，因为把x趋近的值代入相减的两个式子结果为零，不能直接代入；而如果有理化后根式变到分母上成为相加的形式，此时将x趋近的值代入不为0，这样带根号的式子就去掉了。这里注意有些时候x必须要在式子化到最简的时候，也就是代入之后直接出现所求结果的时候才能代入，而有时候x在式子没有化到最后一步的时候就能带入。接下来几道题还会出现这种问题。到底什么时候可以代入，什么时候不可以代入。我会在本章节习题答案最后为大家解答。

分母上$\sin x\sim x$，并进行分子有理化，原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$

将x趋近于0代入至$\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}$，则原式= $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{2x^3}$

由于$\tan x-\sin x\sim\frac{x^3}{2}$（推导过程$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)$，建议大家直接记住等价无穷小，有能力再记忆一下前三项的麦克劳林展开），则原式= $\frac{1}{4}$

(4)法一、由洛必达法则得到

原式= $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1+2x+\cdots nx^{n-1}}{1}$= $1+2+\cdots n$= $\frac{n(n+1)}{2}$

法二、$x^k-1=(x-1)(1+x+\cdots+x^{k-1})$

原式 = $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(x^k-1)}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\sum\limits_{k=1}^{n}(1+x+\cdots+x^{k-1})=\sum\limits_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

(5)对于底数和指数均含x的式子要用$x^x = e^{x\ln x}$达到指数和底数在同一部分的目的

原式=

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(1+2\sin x)}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+2\sin x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2\sin x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x}=2$$

(6)此题时（2）和（5）综合，处理方法相同，先将指数和底数放到一起，分子再提出$\mathrm{e}^{x\ln a}$，利用$e^x-1\sim x$的等价无穷小来做

原式=

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(a+x)}\text{ - }\mathrm{e}^{x\ln a}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln a}(e^{x\ln\frac{x+a}{a}}\text{ - }1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln a}x\ln(1+\frac{x}{a})}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln a}\ln(1+\frac{x}{a})}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln a}\frac{x}{a}}{x}(\text{P.S.}:\ln(1+x)\sim x)=\frac{1}{a}$$

4、

$$e^{2x^2}-\ln[e(1+x^2)]=e^{2x^2}-\ln(1+x^2)-1=2x^2-x^2+o(x^2)=x^2+o(x^2)$$

注意这里几个式子是加减关系而不是乘除关系，用等价无穷小不太严谨，所以用带皮阿诺余项的麦克劳林展开。若与ax^n是等价无穷小，两者比值的极限应该是1，故a=1，n=2

5、对于给定函数是以极限的形式存在时，一般会先将极限求出来，再去分析具体函数的特征。延续前面几题中指数和底数放在一起的思路，$f(x)=\lim_{t\to x}e^{\frac{x}{\sin t-\sin x}(\ln\sin t-\ln\sin x)}$，由拉格朗日中值定理得，在[sint,sinx]存在使

$$\frac{\ln\sin t-\ln\sin x}{\sin t-\sin x}=(\ln x)'|_{x=\xi}=\frac{1}{\xi}$$

，当t趋近于x时ξ趋近于sinx，所以$\frac{x}{\sin t-\sin x}(\ln\sin t-\ln\sin x)$= $\frac{x}{\sin x}$，所以$f(x)=e^{\frac{x}{\sin x}}$，间断点有x=0，为可去间断点；

$x=n\pi,n\in Z$且$n\neq 0$，为无穷间断点。

6、n趋于无穷时，函数可能在x=1或-1处发生突变。保证在这两点连续，则函数在整个定义域上连续。

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1+a+b}{2}\quad,\ x=1\\ ax^2+bx=a+b\,,x\to 1^-\\ \frac{1}{x}=1\,,x\to 1^+\end{cases}$$

得到$\frac{1+a+b}{2}=a+b=1$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{-1+a-b}{2} & ,\ x=1\\ ax^2+bx=a-b & ,x\to-1^-\\ \frac{1}{x}=-1 & ,x\to-1^-\end{cases}$$

得到$\frac{-1+a-b}{2}=a-b=-1$

解得a=0，b=1

7、科普下银行利率的知识，利率分名义利率和实际利率，利率都是按年来表示，但是利率的结算却可能是按月或按季，题目中9%是名义利率，每年四次付息，所以每次付息的利率是9%/4，假设存入100元，银行按复利计算，到第一年年底收到的其实要比100(1+9%)要多。实际上收到$100(1+\frac{9\%}{4})^4$，这个真正结算钱时算出的利率$(1+\frac{9\%}{4})^4-1$就叫做实际利率。

(1) $x(1+\frac{9\%}{4})^{40}=12000$，解得x=4927.75

(2)复利是连续的意思就是在每一个细小的时间段里都在结算着利息，要用到极限。

设一年内结算n次利息，则$\lim\limits_{n\to\infty}x(1+\frac{9\%}{n})^{10n}=12000$，化简得$xe^{\frac{9}{10}}=12000$。解得x=4878.84

★ 补充两个常用极限$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x=e^a$，$\lim\limits_{n\to0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=e^a$

8、设$f(x)=x^n+nx-1$，$f'(x)=nx^{n-1}+n>0$，单调递增，$f(0)=-1<0$，$f(1)=n>0$，由零点存在定理可知，在（0，1）区间必存在唯一正实根.，即$f(x_n)=x_n^n+nx_n-1=0$，整理得$0<x_n=\frac{1-x_n^n}{n}<\frac{1}{n}$，根据夹逼定理，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

9、反证法：设$\varphi(x)=f(x)+x$，则$\varphi(x)$连续，假设不存在这样的ξ使得$\varphi(\xi)=0$，$\varphi(x)$恒大于0，x<0时，$\frac{f(x)}{x}<-1$，当该式存在极限时$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}<0$；当这个极限不存在，x趋于无穷时，$\frac{f(x)}{x}$的值也恒小于-1，与$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$矛盾，所以存在题目中的点使得$f(\xi)+\xi$=0

最后解答一下极限运算时候抛出的那个问题，什么时候可以将趋近的数代进原式，这个问题的根本思维还是极限的四则运算，把一个数代进去意味着把极限拆开成两部分，算出一部分的极限。那么现在要解决的问题就是什么时候极限可拆，什么时候极限不可拆。答案是如果拆开变成的两个部分极

限均存在（不趋于无穷），那么这个极限就可拆。我们现在具体到加减和乘除两种情况来分析。

Part1：如果是两部分加减的形式。那么只要被拆开的一部分极限存在也就是把数代进去的那一部分不趋于无穷，那么这个极限可拆。原理如下

存在± 存在=存在存在± 不存在=不存在

题目让求的极限一定是存在的，拆开后一个部分极限存在，则另一部分极限也必定存在。

Part2：如果是两部分相乘除的形式，那么拆开的每一部分极限存在且不能是0。

原理是：题目让求的极限一定是存在的，如果拆开的一步部分是0，则另一部分有可能是无穷，也就是极限不存在，那么此时不能把极限拆开。注意这里只是可能是无穷，不像第一种情况那样是绝对的。解释下为什么会有这种情况：如果让求的极限不为0（假设是1），那么拆开的一部分是0，另一部分一定是无穷，因为另一部分如果不是无穷，则0乘一个具体的数最后结果是0，与条件矛盾；如果让求的极限是0，拆开的一部分是0，另一部分可能是0也可能是无穷。为了保证正确率，我们遇到这种情况最好继续运算到有把握的地方再去代入。

错误示例：求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x-\sin x}$$

由于$\cos 0 = 1$，则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x-\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x-\sin x} = -1$

错误分析：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x-\sin x} - \frac{x}{\sin x}\cdot\cos x$，此时既要满足$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x-\sin x}$存在，还要满足$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$和$\lim\limits_{x\to 0}\cos x$存在且不为零。根据麦克劳林展开

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}$$

不存在，所以该极限不能拆开。

正确示例：求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$$

由于$\cos 0 = 1$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{(1+\cos x)\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\ln(1+x)} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

正确分析：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{(1+\cos x)\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\ln(1+x)}$$

此时要满足$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}$存在且不为零，满足条件则可以代入。

第二章　章末习题

1、选择题

(1) D

$f(0)=0\cdot g(0)$，∵∵$g(x)$是有界函数，∴∴$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$，∴∴右极限存在，

由洛必达法则：$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=0$

∴∴$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)=0$，

因此$f(x)$在处极限存在且连续，故A、B错；

∵∵$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{\frac{1-\cos\Delta x}{\sqrt{\Delta x}}-0}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}=0$

且$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta x^2 g(\Delta x)-0}{\Delta x}=\Delta x g(\Delta x)=0=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

∴∴$f(x)$在$x=0$处可导，故C错，D正确。

(2)A

∵∵ $f(x)$可导，∴∴$f(x)$是连续函数，

要使$F(x)$在$x=0$处可导，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{F(0+\Delta x)-F(0)}{\Delta x}$存在，

即$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)(1+|\sin\Delta x|)-f(0)}{\Delta x}$存在，

即$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)+f(\Delta x)|\sin\Delta x|}{\Delta x}$存在，

∵∵ $f(x)$可导，∴∴$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$存在，∴∴$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)|\sin\Delta x|}{\Delta x}$存在。

又∵∵$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\Delta x)|\sin\Delta x|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\Delta x)\sin\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}f(\Delta x)=f(0)$，

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x)|\sin\Delta x|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x)(-\sin\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}-f(\Delta x)=-f(0)$

∴∴ $f(0)=-f(0)$，∴∴ $f(0)=0$。

(3)C

$\because x\in(-\delta,\delta)$时，$|f(x)|\leqslant x^2$，$\therefore -x^2\leqslant f(x)\leqslant x^2$，

$x=0$时，$f(0)=0$

由夹逼准则：$0=\lim\limits_{x\to 0}(-x^2)\leqslant\lim\limits_{x\to 0}f(x)\leqslant\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$，$\therefore\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$，

$\therefore f(x)$在$x=0$处连续，故A错；

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}$$

由夹逼准则：

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{-\Delta x^2}{\Delta x}\leqslant\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}\leqslant\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x^2}{\Delta x}$$

$\because \lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{-\Delta x^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x^2}{\Delta x}=0$，$\therefore \lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=0$，

同理可证：$\therefore \lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=0$，

$\therefore \lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=0$在$x=0$处可导，且$f'(0)=0$，故选C。

(4)B

$\because f(x)$在$x=0$处可导，且$f(0)=0$，

$\therefore f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\neq 0$，

且$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}F(x)\neq 0$，

又$\because F(0)=0,\therefore F(x)$在$x=0$处不连续，

$\because \lim\limits_{x\to 0^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)$，$\therefore x=0$是$F(x)$的第一类间断点。

(5)C

$\because f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，且对任意$x_1>x_2$，都有$f(x_1)>f(x_2)$，

$\therefore f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增，

$\therefore$对任意的x，$\therefore$

令$t=-x$，则$f'(x)=f'(-t)\geqslant 0$，$\because t$是R上任意实数，

$\therefore f'(-x)\geqslant 0$，即对任意的$x$，$f'(-x)\geqslant 0$，

故C正确。

(6)D

$\because f(x)$在$x=0$某个邻域内连续，且$f(0)=0,\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2$。

$\therefore$由保号性可知：$0<x<\delta$时，$f(x)>0,-\delta<x<0$时，$f(x)>0$；

$\therefore x\in(-\delta,\delta)$时，$f(0)$是极小值，故C错误，D正确；

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2}=2,\therefore\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=1$fi $\therefore\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}}{x}=1$；

$\because \lim\limits_{x\to 0}x=0$，$\therefore\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

$\therefore f(x)$在$x=0$处可导，且$f'(x)=0$，

$\therefore$A、B错误。

(7)B

$\because f(x)$有二阶连续导数，且$f'(0)=0, \lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{|x|}=1$，

$\therefore$取$\delta\to 0^+, 0<x<\delta$时，$|x|>0, \therefore f^{(2)}(x)>0$；

$-\delta<x<0$时，$|x|>0$，$\therefore f^{(2)}(x)>0$，且$\lim\limits_{x\to 0}f^{(2)}(x)=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$，

$\therefore f^{(2)}(0)=0$，

$\therefore (0,f(0))$不是$y=f(x)$的拐点，

$\therefore$在$(-\delta,\delta)$上$f'(x)$单增，

$\because f'(0)=0, \therefore x\in(-\delta,0)$时，$f'(x)<0$；$x\in(0,\delta)$时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(0)$是$f(x)$的极小值，故B正确。

(8)C

设图中零点分别为x_1,x_2,x_3（$x_1<x_2<0<x_3$）

由图像可知：$f(x)$在$(-\infty,x_1)$上单调递增，在(x_1,x_2)上单调递减，

在$(x_2,0)$上单调递增，在$(0,x_3)$上单调递减，在$(x_3,+\infty)$上单调递增，

$\because f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，

$\therefore x_1,0$是极大值点，x_2,x_3是极小值点，故C正确。

(9)C

曲线$y=f(x)$的拐点$(x_0,0)$满足条件：$f^{(2)}(x_0)=0, f^{(3)}(x_0)\neq 0, f^{(2)}(x)=2(x-2)(x-3)^3(x-4)^4+3(x-2)^2(x-3)^2(x-4)^4+4(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^3+(x-1)$ (多项式)

$\therefore f^{(2)}(1)\neq 0$，排除A；

$f^{(2)}(x)=2(x-1)(x-3)^3(x-4)^4+(x-2)$(多项式)，

$\therefore f^{(2)}(2)\neq 0$，排除B；

$f^{(3)}(x)=6(x-1)(x-2)^2(x-4)^4+(x-3)()$，

$\therefore f^{(3)}(3)\neq 0$，C正确；

$f^{(3)}(x)=(x-4)$，$\therefore f^{(3)}(4)=0$，排除D。

（此题注重对式子求导后结构的分析，而非一直求导算到底，运用巧劲会使求解过程简单很多）

(10)A

对$y=f(x)\ln f(x)$求导，得：$y'=f'(x)\ln f(x)+f'(x)$= $f'(x)[1+\ln f(x)]$

$\because f(x)>0,f'(0)=0$，

$\therefore$要使该函数在$x=0$处取得极小值，则在邻域$(-\delta,0)$上$y'<0$，在邻域$(0,\delta)$上$y'>0$，

A: $f''(0)>0$，则在邻域$(0,\delta)$上$f'(x)>0$，在邻域$(-\delta,0)$上$f'(x)<0$；

$\because f(0)>1,\therefore$在去心邻域$(-\delta,0)\cup(0,\delta)$上$1+\ln f(x)>0$，

此时满足在邻域$(-\delta,0)$上$y'<0$，在邻域$(0,\delta)$上$y'>0$，A正确。

B：$f''(0)<0$，则在邻域$(0,\delta)$上$f'(x)<0$，在邻域$(-\delta,0)$上$f'(x)>0$；

$\because f(0)>1,\therefore$此时与A相反，$y=f(x)\ln f(x)$在$x=0$处取极大值，B错误。

C：$\because f(0)<1,\therefore$在去心邻域$(-\delta,0)\cup(0,\delta)$上$1+\ln f(x)$正负不定，

若$f(0)<\frac{1}{e}$，则在邻域$(-\delta,0)$上$y'>0$，在邻域$(0,\delta)$上$y'<0$，

此时$y=f(x)\ln f(x)$在$x=0$处取极大值，C错误。

D:同理：$\because f(0)<1,\therefore$在去心邻域$(-\delta,0)\cup(0,\delta)$上$1+\ln f(x)$正负不定，

无法确定$y=f(x)\ln f(x)$在$x=0$处一定取极小值，D错误。

2、$\because f(x)$二阶可导，且$f(x)\neq 0$，$\varphi(x)=\lim\limits_{t\to 0}[\frac{f(x+t)}{f(x)}]^{\frac{x}{\sin t}}$

$$\therefore \varphi(x)=\lim_{t\to 0}[1+\frac{1}{\frac{f(x)}{f(x+t)-f(x)}}]^{\frac{f(x)}{f(x+t)-f(x)}\cdot\frac{x}{\sin t}\cdot\frac{f(x+t)-f(x)}{f(x)}}$$

$$=\lim_{t\to 0}e^{\frac{x}{\sin t}\cdot\frac{f(x+t)-f(x)}{f(x)}}$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{x}{\sin t}\cdot\frac{f(x+t)-f(x)}{f(x)}}$$

$$=\lim_{t\to 0}e^{\frac{x}{\sin t}\cdot\frac{tf'(x)}{f(x)}}$$

$$=e^{\frac{xf'(x)}{f(x)}}$$

$$\therefore \varphi'(x)=\frac{[f'(x)+xf''(x)]f(x)-xf'^2(x)}{f^2(x)}e^{\frac{xf'(x)}{f(x)}}$$

3、

$$y=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{1}{2}(\sin 2x)^2$$

$$\therefore y'=-\sin 4x$$

$$\therefore y^{(n)}=-4^{n-1}\sin(4x+\frac{n-1}{2}\pi)$$

4、$dy=f'(x+y)(dx+dy)$

∵一阶导数不为1，$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{f'(x+y)}{1-f'(x+y)}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-f'(x+y)}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}[\frac{f'(x+y)}{1-f'(x+y)}]=\frac{f''(x+y)(1+\frac{dy}{dx})[1-f'(x+y)]+f'(x+y)f''(x+y)(1+\frac{dy}{dx})}{[1-f'(x+y)]^2}$$

$$=\frac{f''(x+y)\frac{1}{1-f'(x+y)}[1-f'(x+y)]+f'(x+y)f''(x+y)\frac{1}{1-f'(x+y)}}{[1-f'(x+y)]^2}$$

$$=\frac{f''(x+y)}{[1-f'(x+y)]^3}$$

5、 $f'(x)=6x-3Ax^{-4}$

$\because A>0, x>0, \therefore$令$f'(x)=0$，得$x=(\frac{A}{2})^{\frac{1}{5}}$ 易知$x=(\frac{A}{2})^{\frac{1}{5}}$时$f(x)$取极小值也是$(0,+\infty)$上最小值

$\therefore$令$f((\frac{A}{2})^{\frac{1}{5}})=3(\frac{A}{2})^{\frac{2}{5}}+A\cdot(\frac{A}{2})^{-\frac{3}{5}}\geqslant 20$，得$A\geqslant 64$

∴A至少应取64。

6、

$$\dot{x}(t)=3t^2+3, \ddot{x}(t)=6t$$

$$\dot{y}(t)=3t^2-3, \ddot{y}(t)=6t$$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(3t^2+3)6t-(3t^2-3)6t}{[3t^2+3]^3}=\frac{36t}{[3t^2+3]^3}$

$\because \dot{x}(t)=3t^2+3>0$恒成立，

$\therefore x(t)$在$(-\infty,0)$上单调递增。

1：若函数图像上凸，则令$\frac{d^2y}{dx^2}<0$，得$t<0 \therefore x<1$

即$y=y(x)$为凸的区间为$(-\infty,1)$；

2：若函数图像下凸，则令$\frac{d^2y}{dx^2}>0$，得$t>0 \therefore x>1$ 即$y=y(x)$为凸的区间为$(1,+\infty)$。

7、易知方程$2^x-x^2=1$有实根$x=0,x=1$，且$x<0$时此方程无实根。

设$f(x)=2^x-x^2-1$，

则$f'(x)=2^x\ln 2-2x$，$f''(x)=2^x(\ln 2)^2-2$，$f^{(3)}(x)=2^x(\ln 2)^3>0$恒成立。

若$f(x)=2^x-x^2-1$有4个零点，

反复使用罗尔定理可得：$f^{(3)}(x)$必有一零点，与上述结论矛盾；

同理：当$f(x) = 2^x - x^2 - 1$的零点个数大于4时，$f^{(3)}(x)$必有零点，矛盾；

因此$f(x)$的零点个数只能为2或3。

$\because f(2) = -1 < 0, f(5) = 6 > 0$，且$f(x)$是连续函数，

$\therefore (2, 5)$上必有零点，即$f(x)$有三个零点，

$\therefore$方程$2^x - x^2 = 1$有且仅有三个实根。

8、构造函数$f(x) = xe^{-x}$，要确定方程$xe^{-x} = a$的实根个数，即确定曲线$f(x) = xe^{-x}$与直线的交点个数。

$f'(x) = (1 - x)e^{-x}$，

由图像易知：$f(x)$在$(-\infty, 1)$上单调递增，在$(1, +\infty)$上单调递减，$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$，

$f(1) = \frac{1}{e}$是极大值也是最大值，且$x > 0$时，$f(x) > 0$；$x < 0$时，$f(x) < 0$。

$\because a > 0$，

$\therefore a \in (0, \frac{1}{e})$时，有两个交点，即方程$xe^{-x} = a$有两个实根；

$a = \frac{1}{e}$时，有一个交点，即方程$xe^{-x} = a$有一个实根；

$a \in (\frac{1}{e}, +\infty)$时，无交点，即方程$xe^{-x} = a$无实根。

9、(1) 当$x = 1$时，$(x^2 - 1)\ln x = (x - 1)^2$，

要证明$(x^2 - 1)\ln x \geqslant (x - 1)^2$，

即证明当$x > 1$时，$\ln x + \frac{2}{x+1} - 1 > 0$恒成立；$x < 1$时，$\ln x + \frac{2}{x+1} - 1 < 0$恒成立。

设$f(x) = \ln x + \frac{2}{x+1} - 1$，则$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+1}{x(x+1)^2} > 0$

因此$f(x)$在$(0, 1)$和$(1, +\infty)$上均单调递增。

当$x > 1$时，$f(x) > f(1) = 0$，即$\ln x + \frac{2}{x+1} - 1 > 0$，

当$x < 1$时，$f(x) < f(1) = 0$，即$\ln x + \frac{2}{x+1} - 1 < 0$，

$\therefore$综上所述：$(x^2 - 1)\ln x \geqslant (x - 1)^2$（其中$x > 0$）

(2) 令$t = \frac{b}{a}, (t > 1)$

要证明$\ln\frac{b}{a} > \frac{2(b-a)}{a+b}$，即证明$\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$，即$\ln t + \frac{4}{t+1} - 2 > 0$，

设$f(t) = \ln t + \frac{4}{t+1} - 2, (t > 1)$，则$f'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0$，

因此$f(t)$在$(1, +\infty)$上单调递增，$\therefore f(t) > f(1) = 0$

$\therefore \ln\frac{b}{a} > \frac{2(b-a)}{a+b}$（其中$b > a > 0$）

10、将$e^x-1=xe^{\theta x}$变形为$\theta=\frac{\ln(e^x-1)-\ln x}{x}$，

$\because \lim\limits_{x\to0} x=\lim\limits_{x\to0}[\ln(e^x-1)-\ln x]=\lim\limits_{x\to0}\ln\frac{e^x-1}{x}=0$

$\therefore$由洛必达法则：

$$\lim_{x\to0}\theta=\lim_{x\to0}\frac{\ln(e^x-1)-\ln x}{x}=\lim_{x\to0}(\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{1}{x})=\lim_{x\to0}[1+\frac{x-e^x+1}{x(e^x-1)}]$$

$$=1+\lim_{x\to0}\frac{x-e^x+1}{x^2}=1+\lim_{x\to0}\frac{1-e^x}{2x}=1+\lim_{x\to0}\frac{-e^x}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{x\to0}\theta=\frac{1}{2}$$

11、(1)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{[x\ln(1+x)-x^2](\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\frac{1-\cos x}{\cos x}}{2x[\ln(1+x)-x]}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2[\ln(1+x)-x]}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{2(-\frac{1}{2}x^2)}=-\frac{1}{2}$$

(2) 由洛必达法则：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{-2x}{x\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{-2}{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=-\frac{1}{4}$$

(3) 将$f(x)=\sin 6x$在$x_0=0$处Taylor展开，得：$\sin 6x=6x-36x^3+o(x^3)$，

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x[f(x)+6]-36x^3+o(x^3)}{x^3}=0$$

即

$$\lim_{x\to0}\frac{x[f(x)+6]-36x^3}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+6-36x^2}{x^2}=0$$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=36$

(4) $x=0$时，$y=1$，即$f(0)=1$，

对题中方程求导，得：$dy-dx=e^{x(1-y)}[(1-y)dx-xdy]$

代入$x=0$，$y=1$，得$\frac{dy}{dx}|_{x=0}=1$，即$f'(0)=1$

由洛必达法则：$\lim\limits_{n\to\infty}n[f(\frac{1}{n})-1]=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=f'(0)=1$

12、由题可知：$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1-\sin x}{ax^n}=1\because\lim\limits_{x\to0}(e^x-1-\sin x)=\lim\limits_{x\to0}ax^n=0$ 由洛必达法则：$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-\cos x}{nax^{n-1}}=1$

$\because\lim\limits_{x\to0}(e^x-\cos x)=\lim\limits_{x\to0}nax^{n-1}=0$，

$\therefore$由洛必达法则：$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+\sin x}{n(n-1)ax^{n-2}}=1$

$\because\lim\limits_{x\to0}(e^x+\sin x)=1$，$\lim\limits_{x\to0}n(n-1)ax^{n-2}=1$

$\therefore n=2,a=\frac{1}{2}$。

13、构造辅助函数：$g(x)=e^x[f(x)-1]$，则$g'(x)=e^x[f(x)+f'(x)-1]$

由条件可知：$g(a)=g(b)=0$，且$g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导

$\therefore$由罗尔中值定理：存在$\eta\in(a,b)$，使

$$g'(\eta)=e^\eta[f(\eta)+f'(\eta)-1]=\frac{g(a)-g(b)}{a-b}=0$$

$\therefore f(\eta)+f'(\eta)=1$ 令$\eta=\xi$，则：$e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=f(\eta)+f'(\eta)=1$ 即存在$\xi,\eta\in(a,b)$，使$\xi,\eta\in(a,b)$

14、$\because f(x)$ $[0,1]$上有二阶连续导数，且$\min\limits_{0\leqslant x\leqslant1}f(x)=-1$，

设$f(c)=-1,c\in(0,1)$，易知：$f'(c)=0$

并将$f(x)$在$x=c$处泰勒展开，得：$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2$

$\therefore f(0)=-1+\frac{f''(\xi_1)}{2}c^2=0$，$f(1)=-1+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2=0$

$\therefore f''(\xi_1)=\frac{2}{c^2},f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-c)^2}$，

$\therefore\max\limits_{0\leqslant x\leqslant1}|f''(x)|\geqslant\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}=\max\{\left|\frac{2}{c^2}\right|,\left|\frac{2}{(1-c)^2}\right|\}$

当且仅当$c=\frac{1}{2}$时，$\max\{\left|\frac{2}{c^2}\right|,\left|\frac{2}{(1-c)^2}\right|\}=8$，

当$c\neq\frac{1}{2}$时，$\max\{\left|\frac{2}{c^2}\right|,\left|\frac{2}{(1-c)^2}\right|\}\geqslant8$，

$\therefore\max\limits_{0\leqslant x\leqslant1}|f''(x)|\geqslant8$ 。

15、设$a=\min\{f(0),f(1),f(2)\}$，$b=\max\{f(0),f(1),f(2)\}$

则$6a\leqslant6\leqslant6b,\therefore a\leqslant1\leqslant b$

$\because f(x)$在$[0,3]$上连续，在$(0,3)$内可导，

$\therefore$由介值定理可知：存在$\eta\in[0,2]$，使得$f(\eta)=1$，

又$\because f(3)=1$，由罗尔中值定理：存在$\xi\in(\eta,3)$，使$f'(\xi)=\frac{f(3)-f(\eta)}{3-\eta}=0$，

因此也必存在$\xi\in(0,3)$，使$f'(\xi)=0$。

16、假设在$[0,+\infty)$上$f(x)$不恒等于0，分以下三类情况进行讨论：

1：x_0是$f(x)$的零点，且左右异号，则必有$|f'(x_0)|>|f(x_0)|=0$，不符合条件；

2：若在$[0,+\infty)$上$f(x)\geqslant 0$恒成立，则有：$f'(x)\leqslant f(x)$，

设函数$g(x)=e^{-x}f(x)$，则$g'(x)=e^{-x}[f'(x)-f(x)]\leqslant 0$，

$\therefore g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减，

$\therefore g(x)\leqslant g(0)=0$，即$f(x)\leqslant 0$，

$\therefore f(x)=0$；

3：若在$[0,+\infty)$上$f(x)\leqslant 0$恒成立，则有：$f'(x)\geqslant f(x)$，

设函数$g(x)=e^{-x}f(x)$，则$g'(x)=e^{-x}[f'(x)-f(x)]\geqslant 0$，

$\therefore g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，$\therefore g(x)\geqslant g(0)=0$，即$f(x)\geqslant 0$，

$\therefore f(x)=0$；

综上所述：在$[0,+\infty)$上，$f(x)\equiv 0$。

17、(1) $\because f(x)$是奇函数，在$[-1,1]$上具有二阶函数，且$f(1)=1$，

$\therefore f(0)=0, f(-1)=-1$

由Lagrange中值定理可知：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$。

(2) $\because f(0)=0, f(-1)=-1$，

$\therefore$由Lagrange中值定理可知：存在$\xi'\in(-1,0)$，使得$f'(\xi')=\frac{f(-1)-f(0)}{-1-0}=1$。

构造函数$g(x)=e^x[f'(x)-1]$，

则$g(\xi)=g(\xi')=0$，$g'(x)=e^x[f'(x)+f''(x)-1]$，

由Lagrange中值定理可知：存在$\eta\in(\xi',\xi)$，使得$g'(\eta)=\frac{g(\xi)-g(\xi')}{\xi-\xi'}=0$，

即存在$\eta\in(-1,1)$，使得$f''(\eta)+f'(\eta)=1$。

第三章　章末习题

1、选择题

(1)D

A、如函数

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases},F'(x)=f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$\because f(x)$在$[-1,1]$上无界，故不可积。

B、由A中函数知，$f(x)$在$x=0$处不一定连续。

C、因为不知$f(x)$是否连续，因而不一定。

D、明显正确，$F'(x)\ f(x)$

(2)D

A、如函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0\\ x, & x<0\end{cases}$ 在$[-1,1]$上可积，但在$x=0$处有跳跃间断点，不具有原函数。

B、由A中可知、B错误

C、比如函数$f(x)=\begin{cases}0, & x=\frac{1}{n}\\ x, & x\neq\frac{1}{n}\end{cases}$ $n\in\mathrm{N}^+$ ，有几何意义可知$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}$，明显可积，但有无数个可去间断点。

D、D为可积的必要条件，可积则必有界。

(3)A $\because F(x)$为连续函数，则$F(x)$可表示为$F(x)=\int_0^x f(t)dt+C$

A、$F(-x)=\int_0^{-x}f(x)dx+C$令$\begin{array}{l}m=-t\Rightarrow dt=-dm\\ \Rightarrow F(-x)=\displaystyle\int_0^x f(m)dm+C=F(x)\end{array}$因此A正确

B、同理可推出$F(-x)=-\int_0^x f(m)dm+C$不一定等于$-F(x)$，B错误

C、取函数$f(x)=\sin x+1 \Rightarrow F(x)=x-\cos x+C$可知$F(x)$不为周期函数，因此C错误

D、可知$F'(x)=f(x)$，若$f(x)\leqslant 0 \Rightarrow F(x)$单减、D错误。

(4)D

分析：定理：若$f(x)\in C[a,b]$且$x=\varphi(t)\in C^1[\alpha,\beta]$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, $a\leqslant\varphi(t)\leqslant b$
又$\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$则有：$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$
由上述定理
A、$x=\sqrt{x}\Rightarrow x'(t)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$在$x=0$处不连续。
B、$x=\frac{1}{t}$在$x=0$处不连续。
C、$t=\tan x$，在$x=\frac{\pi}{2}$处间断。
D、满足所有条件。

2、分析：讨论连续性一般对于间断点要分别计算左右极限并与此处函数值作比较。若$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=f(a)$，则$f(x)$在$x=a$处连续。

右极限

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 2(e^x-1)}{\int_0^x\sqrt{1+t^3}dt}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{\int_0^x\sqrt{1+t^3}dt}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{\sqrt{1+x^3}}=2$$

左极限

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\int_0^x\cos^2 t dt}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos^2 x}{1}=1$$

因此$f(x)$在$x=0$处为跳跃间断点。
当$x\neq 0$时，$f(x)$为初等函数，处处连续。

3、分析：$g(x)$为函数$f(x)$的反函数$\Rightarrow g(f(x))=x$
对$\int_1^{f(x)}g(t)dt=\frac{1}{3}(x^{\frac{3}{2}}-8)$ 两端求导
$\Rightarrow xf'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f(x)=\sqrt{x}+C$
$\Rightarrow x=(f(x)-C)^2\Rightarrow g(t)=(t-C)^2\geqslant 0$
取$x=4\Rightarrow\int_1^{f(4)}g(t)dt=0,$
$\because g(t)\geqslant 0\Rightarrow f(4)=1\Rightarrow C=-1$由此可知 $f(x)=\sqrt{x}-1$

4、分析：利用定积分求极限，有时需要利用夹逼的方法。

(1)

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2$$

(2)由夹逼有

$$\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+1}\leqslant\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}\leqslant\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{1+n}\frac{1}{n}2^{\frac{k}{n}}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n+\frac{1}{n}}\frac{1}{n}2^{\frac{k}{n}}$$

$\Rightarrow$原式 = $\int_0^1 2^x dx=\frac{1}{\ln 2}$

(3)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^p=\int_0^1 x^p dx=\frac{1}{p+1}$$

(4)

$$\because x\in[0,\frac{1}{2}]\Rightarrow 0\leqslant\frac{x^n}{1+x^n}\leqslant\frac{(\frac{1}{2})^n}{1+(\frac{1}{2})^n}$$

两端积分

$$\Rightarrow 0\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1+x^n}dx\leqslant\frac{1}{2}\frac{(\frac{1}{2})^n}{1+(\frac{1}{2})^n}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1+x^n}dx=0$$

5、分析：对于积分的计算在于平时的积累以及一些方法的掌握。想较为全面了解这些，可以参考中科大《积分的方法与技巧》

(1)原式

$$=\int\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2\sqrt{x^2+1}}d(x^2+1)=\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})d\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\int$$

$$=\sqrt{x^2+1}\ln(x+\sqrt{x^2+1})-x+C$$

(2)原式$=\int\frac{\arctan e^x}{e^x}dx=-\int\arctan e^x de^{-x}$令

$$=-\frac{\arctan t}{t}+\int\frac{1}{t(1+t^2)}dt=-\frac{\arctan t}{t}+\int\frac{1}{t}dt-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t^2}d(t^2+1)$$

$$=-\frac{\arctan t}{t}+\ln t-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+C$$

$$=-e^{-x}\arctan e^x+x-\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C$$

(3)原式=

$$\int \arctan x(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2})dx = \int -\arctan x d(\frac{1}{x}) - \int \arctan x d\arctan x$$
$$= -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{1}{x(1+x^2)}dx - \frac{1}{2}\arctan^2 x$$
$$= -\frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2}\arctan^2 x + \int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}d(1+x^2)$$
$$= -\frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2}\arctan^2 x + \ln\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right| + C$$

(4)令

$$t=\sqrt{x} \Rightarrow x=t^2 \Rightarrow dx=2tdt \Rightarrow \int (2t\cos^2 t - t + t)dt = \int (t\cos 2t + t)dt$$
$$= \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\int td\sin 2t = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t\sin 2t - \frac{1}{2}\int \sin 2tdt$$
$$= \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t\sin 2t + \frac{1}{4}\cos 2t + C$$
$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{x}\sin 2\sqrt{x} + \frac{1}{4}\cos 2\sqrt{x} + C$$

(5)令$\ln x = t \Rightarrow x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt$ 原式

$$= \int \cos t de^t = e^t \sin t - \int \sin t de^t = e^t \sin t + \int e^t d\cos t$$
$$= e^t \sin t + e^t \cos t + C - \int \cos t de^t$$
$$\Rightarrow \int e^t \cos t dt = \frac{1}{2}e^t(\sin t + \cos t) + C$$
$$\Rightarrow \int \cos\ln x dx = \frac{1}{2}x(\sin\ln x + \cos\ln x) + C$$

(6)原式

$$= \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)$$
$$= \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C$$

(7)

$$\int \frac{1}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}dx = \int -\frac{2}{\sin^2 x}d\sqrt{1+\cos x}$$
$$= \int \frac{2}{(\cos^2 x - 1)}d\sqrt{1+\cos x}$$
$$= \int (\frac{1}{\cos x - 1} - \frac{1}{\cos x + 1})d\sqrt{1+\cos x}$$

令$t = \sqrt{1+\cos x} \Rightarrow \cos x = t^2 - 1$

$$= \int \frac{1}{t^2-2}dt - \int \frac{1}{t^2}dt = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + \frac{1}{t} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\cos x}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{2}}{\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{2}}\right| + C$$

(8)

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin x}}dx = \int_0^{\pi} \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}}dx = \int_0^{\pi} \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}dx$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 m - \sin^2 m}{\cos m}dm \left(m = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos m - \sec m dm)$$

$$= 2\sqrt{2}(2\sin m - \ln|\sec m + \tan m|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 4 - 2\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})$$

(9)令$t = -x \Rightarrow I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1-\sin t}dt$

$$\Rightarrow 2I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{1-\sin^2 x}dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx = 4\tan x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = 4 \Rightarrow I = 2$$

(10)

$$I=\int_0^a\frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt\,(x=a\sin t)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin m}{\sin m+\cos m}dm\left(m=\frac{\pi}{2}-t\right)$$

$$\Rightarrow 2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dt\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}$$

(11)

$$\int_\alpha^{2\ln 2}\frac{e^t dt}{e^t\sqrt{e^t-1}}=\int_\alpha^{2\ln 2}\frac{2}{e^t}d\sqrt{e^t-1}$$

$$=\int_\alpha^{2\ln 2}\frac{2}{e^t-1+1}d\sqrt{e^t-1}=\int_{\sqrt{e^\alpha-1}}^{\sqrt{3}}\frac{2}{m^2+1}dm\left(m=\sqrt{e^t-1}\right)$$

$$=2\arctan m\Big|_{\sqrt{e^\alpha-1}}^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \alpha=\ln 2$$

(12) $\int_0^\pi\sqrt{\sin x(1-\sin^2 x)}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x(1-\sin^2 x)}dx$

令$\sin x=t\Rightarrow x=\arcsin t\Rightarrow dx=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

原式 = $2\int_0^1\sqrt{t}\sqrt{1-t^2}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=2\int_0^1\sqrt{t}dt=\frac{4}{3}$

(13)

$$\int_0^2 f(x-1)dx=\int_{-1}^1 f(t)dt\,(t=x-1)$$

$$=\int_{-1}^0\frac{1+e^t-e^t}{1+e^t}dt+\int_0^1\frac{1}{1+t}dt=\ln(\frac{1}{e}+1)+1$$

(14)

$$\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\int\frac{2}{e^x}d\sqrt{e^x-1}=\int\frac{2}{e^x-1+1}d\sqrt{e^x-1}=2\arctan\sqrt{e^x-1}+C$$

(15)

$$\int_{\frac{1}{e}}^e|\ln x|\,dx=-\int_{\frac{1}{e}}^1\ln xdx+\int_1^e\ln xdx\left(\int\ln xdx=x\ln x-x+C\right)=2(1-\frac{1}{e})$$

(16)

$$\int_1^e \ln^3 x dx = \int_0^1 t^3 e^t dt \left(t = \ln x \Rightarrow x = e^t\right)$$

$$= \int_0^1 t^3 de^t = t^3 e^t \Big|_0^1 - 3\int_0^1 t^2 de^t = e - 3t^2 e^t \Big|_0^1 + \int_0^1 6t de^t$$

$$= -2e + 6te^t \Bigg|_0^1 - 6\int_0^1 e^t dt$$

$$= 4e - 6e + 6 = 6 - 2e$$

(17)

$$\int_0^{2n\pi} \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = n\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$$

$$= 4n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = 4n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x d\tan x}{\tan^4 x + 1}$$

$$= 4n\int_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{t^4+1} dt \, (t = \tan x) = 4n\int_0^{+\infty} \frac{1 + \frac{1}{t^2} dt}{t^2 + \frac{1}{t^2}}$$

$$= 4n\int_0^{+\infty} \frac{d(t - \frac{1}{t})}{(t - \frac{1}{t})^2 + 2} = 4n\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\frac{1}{\sqrt{2}}(t - \frac{1}{t}))\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$= 2\sqrt{2} n\pi$$

(18)

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx = \int_0^1 (1-x)^{n-1} d(\frac{1}{m}x^m)$$

$$= \frac{1}{m} x^m (1-x)^{n-1}\Bigg|_0^1 + \frac{(n-1)}{m}\int_0^1 x^m (1-x)^{n-2} dx$$

$$= \frac{(n-1)}{m(m+1)}\int_0^1 (1-x)^{n-2} dx^{m+1}$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{m(m+1)}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-3} dx$$

递推下去

$$= \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-n+1)}{m(m+1)(m+2)\cdots(m+n-2)}\int_0^1 x^{m+n-2}dx$$
$$= \frac{(n-1)!}{m(m+1)\cdots(m+n-1)} = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$$

(19)

$$\int\sqrt{\frac{x}{1+x^{\frac{3}{2}}}}dx = \frac{2}{3}\int\frac{1}{\sqrt{1+x^{\frac{3}{2}}}}d(1+x^{\frac{3}{2}}) = \frac{4}{3}\sqrt{x\sqrt{x}+1}+C$$

(20)

$$\int(x+x^3)\operatorname{arccot}x dx = \int \operatorname{arccot}x d(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4)$$

$$= (\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4)\operatorname{arccot}x + \int\frac{2x^2+x^4}{4(1+x^2)}dx$$
$$= (\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4)\operatorname{arccot}x + \int\frac{(x^2+1)^2-1}{4(x^2+1)}dx$$
$$= \frac{1}{4}(1+x^2)^2\operatorname{arccot}x + \frac{1}{4}x + \frac{x^3}{12} + C$$

(21)

$$\int x\tan x\sec^4 x dx = \int x\sec^3 x d\sec x$$
$$= \frac{1}{4}\int x d\sec^4 x = \frac{1}{4}x\sec^4 x - \frac{1}{4}\int\sec^2 x d\tan x$$
$$= \frac{1}{4}x\sec^4 x - \frac{1}{4}\int(\tan^2 x+1)d\tan x$$
$$= \frac{1}{4}x\sec^4 x - \frac{1}{12}\tan^3 x - \frac{1}{4}\tan x + C$$

(22) 法一、

$$\int\frac{x+1}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x^2-x+\frac{1}{4})}} = \int\frac{1}{2}\frac{2x-1+3}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}d(2x-1)$$

$$= -\frac{1}{4}\int\frac{d(1-(2x-1)^2)}{\sqrt{1-(2x-1^2}} + \int\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}d(2x-1)$$
$$= \frac{3}{2}\arcsin(2x-1) - \sqrt{x-x^2} + C$$

法二、化为有理积分

$$\int \frac{x+1}{(1-x)\sqrt{\frac{x}{(1-x)}}}dx = \int \frac{2t^2+1}{t}d(-\frac{1}{t^2+1})\left(t=\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)$$
$$= -\frac{(2t^2+1)}{t(t^2+1)} + \int \frac{2}{1+t^2}dt - \int \frac{dt}{t^2(t^2+1)}$$
$$= 3\arctan t - \frac{t}{t^2+1} + C$$
$$= -\sqrt{x-x^2} + 3\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}} + C$$

6、证明：

$$\int_0^{2\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi))dx = \int_{\varphi}^{2\pi+\varphi} f(\sqrt{a^2+b^2}\sin t dt\,(t=x+\varphi)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(k\sin t)dt\left(k=\sqrt{a^2+b^2}\right) = \int_{-\pi}^{0} f(k\sin x)dx + \int_0^{\pi} f(k\sin x)dx$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(k\sin x)dx + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(k\sin x)dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(k\sin x)dx$$
$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sqrt{a^2+b^2}\sin x)dx = right$$

7、证明：

$$f(n) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2}x(\sec^2 x-1)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2}x d\tan x - f(n-2)$$

$$\Rightarrow f(n)+f(n-2) = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n-1}$$

得证

8、法一： $\alpha\in(01)$要证明 $\int_0^{\alpha} f(x)\ dx \geqslant \alpha\int_0^1 f(x)dx$，只需证$\frac{\int_0^{\alpha} f(x)dx}{\alpha} \geqslant \frac{\int_0^1 f(x)dx}{1}$ 令

$$F(t) = \frac{\int_0^t f(x)dx}{t} \Rightarrow F'(t) = \frac{tf(t)-\int_0^t f(x)dx}{t^2} = \frac{f(t)-f(\xi)}{t}, (0<\xi<t)$$

$\because f(x)$在$[0,1]$上单减$\Rightarrow F'(t)\geqslant 0\Rightarrow F(\alpha)\geqslant F(1)$得证

法二：$\int_0^\alpha f(x)dx=\alpha\int_0^1 f(\alpha t)dt\,(x=\alpha t)=\alpha\int_0^1 f(\alpha x)dx$

等价于证明：

$$\alpha\int_0^1 f(\alpha x)dx\geqslant\alpha\int_0^1 f(x)dx\Rightarrow\int_0^1 f(\alpha x)dx\geqslant\int_0^1 f(x)dx,$$

$$\because\alpha\in(0,1)\Rightarrow f(\alpha x)\geqslant f(x)$$

原式成立

9、

$$f(\frac{1}{x})=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln t}{1+t}dt=\int_1^x\frac{\ln m}{m(1+m)}dm(m=\frac{1}{t})\Rightarrow f(x)+f(\frac{1}{x})=\int_1^x\frac{\ln t}{t}dt$$

$$=\int_1^x\ln t d\ln t=\frac{1}{2}\ln^2 x$$

10、

$$\int_0^\pi[f(x)+f''(x)]\sin xdx=\int_0^\pi f(x)\sin xdx-\int_0^\pi\sin xdf'(x)$$

$$=\int_0^\pi f(x)\sin xdx-\int_0^\pi\cos xdf(x)=-f(x)\cos x\Big|_0^\pi=f(0)+f(\pi)=5$$

$$\Rightarrow f(0)=3$$

11、$\because -1<y<1$可知将积分分段有：

原式$=\int_{-1}^y(y-x)e^xdx+\int_y^1(x-y)e^xdx=2e^y-(e+\frac{1}{e})y-\frac{2}{e}$

12、左边

$$=\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{2c}{x-c})^{\frac{x-c}{2c}\frac{2cx}{x-c}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{x}{x-c}2c}=e^{2c}$$

右边

$$=\int_{-\infty}^c xe^{2x}dx=\frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_{-\infty}^c-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^c e^{2x}dx=(\frac{1}{2}c-\frac{1}{4})e^{2c}=e^{2c}\Rightarrow c=\frac{5}{2}$$

13、

$$y(x)=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{x}{1+x^2-e^{\alpha x}}=\begin{cases}0, & x\geqslant 0\\ \dfrac{x}{1+x^2}, & x<0\end{cases}$$

分析可知：

$$S=\int_{-1}^{0}\frac{x}{2}-y(x)dx+\int_{0}^{1}\frac{x}{2}dx=\int_{-1}^{0}-y(x)dx=\frac{1}{2}\ln 2$$

14、由题可知：

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^{\pi}e^{-2x}\sin xdx=-\pi\int_0^{\pi}e^{-2x}d\cos x\\&=\pi+\pi e^{-2\pi}-2\pi\int_0^{\pi}e^{-2x}d\sin x\\&=\pi+\pi e^{-2\pi}-4\pi\int_0^{\pi}e^{-2x}\sin xdx\Rightarrow V=\frac{\pi(1+e^{-2\pi})}{5}\end{aligned}$$

15、设切点为(x_0,y_0)由对称性取$x_0>0$

$k=y'\,|_{x=x_0}=-2x_0\Rightarrow y-(1-{x_0}^2)=-2x_0(x-x_0)\Rightarrow y=-2x_0x+{x_0}^2+1$

由此算得截距从而得：

$$\begin{aligned}&S(x_0)=\frac{1}{2}({x_0}^2+1)\frac{({x_0}^2+1)}{2x_0}=\frac{1}{4}({x_0}^3+2x_0+\frac{1}{x_0})\\&\Rightarrow S'(x_0)=\frac{1}{4}(3{x_0}^2+2-\frac{1}{{x_0}^2})\end{aligned}$$

令 $S'(x_0)=0,\because x_0>0\Rightarrow x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$

又 $\lim\limits_{x\to0^+}S(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}S(x)=+\infty>S(x_1)\Rightarrow S(x_1)$即为最小值

由对称性，可知使得面积最小的切点为$P(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2}{3})$

16、构造函数$F(x)=xf(x)$

$\because F(1)=f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx=\xi_1f(\xi_1)=F(\xi_1)\,\left(0<\xi_1<\frac{1}{2}\right)$

由罗尔定理 $\Rightarrow\exists\xi\in(\xi_1,1)\quad F'(\xi)=f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

得证

第四章　章末习题

1、选择题

(1)D

解析：所给的是一阶线性齐次微分方程，其通解应该仅包含一个任意常数C，而题设y_1，y_2为不同特解，$y_1 - y_2 \neq 0$，故D正确；

A中含有两个任意常数，B中若$y_2 = 0$，则不能表示通解，C同理，若$y_1 + y_2 = 0$则不能表示通解，故排除选项A、B、C。

(2)C

解析：将原方程简写为$L(y) = 0$，其中为线性微分算子。则有 $L(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1L(y_1) + C_2L(y_2) = 0$，

故$C_1y_1 + C_2y_2$是微分方程的解。

未知y_1与y_2是否线性相关，故无法判断$C_1y_1 + C_2y_2$是否为通解。

(3)A

解析：将x_0代入原微分方程可得$f(x_0) - 2f'(x_0) + 4f(x_0) = 0$，即

$f''(x_0) = -4f(x_0) < 0$，故函数$f(x)$在点x_0处取得极大值。

(4)A

解析：原线性齐次微分方程对应的特征方程为$\lambda^2 + b\lambda + 1 = 0$.分情况讨论：

（1）原微分方程的通解为$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$,则有$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$，故有$\Delta = b^2 - 4 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = -b < 0$，亦即$b > 2$；

（2）原微分方程的通解为$y = (C_1 + C_2x)e^{\lambda x}$，则$\lambda = -1, b = 2$；

（3）原微分方程的通解为$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$,则$\alpha \leqslant 0, \Delta < 0$，即$0 \leqslant b < 2$.

综上所述，$b \geqslant 0$.

(5)C

解析：原线性齐次微分方程对应的特征方程为$\lambda^3+a\lambda^2+b\lambda+c=0$，而

$y_1=e^x, y_2=x$是两个特解，则$y_3=1$ 必是一个特解，说明特征方程的根为$\lambda_1=\lambda_2=0, \lambda_3=1$. 所以原特征方程为

$\lambda^2(\lambda-1)=0$，即$a=-1, b=c=0$.

2、(1)设$y'=p$，则原方程可化为$\begin{cases}\dfrac{dp}{dx}+2xp^2=0\\ p(0)=0, y(0)=1\end{cases}$，

解第一个方程，当$p\neq 0$时，$-\frac{dp}{p^2}=2x$，

得$p=\frac{1}{x^2+C}$与$p(0)=0$条件不符；

故$p=0$，又由$y(0)=1$得$y=1$.

(2)对应线性齐次方程的特征方程为$\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=0$.故特征根为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$。

从而线性齐次方程的通解为$y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{-x}$.现求非齐次线性方程的一个特解.由于$\mu=-1$是特征方程的三重根，

故应令$y^*=x^3(B_0+B_1x)e^{-x}$.求导后代入原方程，化简得$24B_1x+18B_0=x-5$，比较同幂次的系数，得$24B_1=1, 6B_0=-5$，从而$B_1=\frac{1}{24}, B_0=-\frac{5}{6}$.

所以，原方程的通解为$y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{-x}+(\frac{1}{24}x^4-\frac{5}{6}x^3)e^{-x}$

(3)对应线性齐次方程的特征方程为$\lambda^2+1=0$.故特征根为$\lambda_1=i, \lambda_2=-i$.

从而线性齐次方程的通解为$y=C_1\cos x+C_2\sin x$. 将方程右边拆成两部分：$y''+y=x$和$y''+y=\cos x$求特解。

对于前半部分：由于不是特征根，故应令$y^*=B_0+B_1x$，求导后代入原方程，化简得$B_0+B_1x=x$，比较系数得$B_0=0, B_1=1$，从而前半部分的一个特解为$y^*=x$.

对于后半部分：为求原方程的一个特解，先求微分方程$y''+y=e^{ix}$的特解，由于i是单根，故令$y^*=xB_0e^{ix}$.求导后代入方程并化简得$2iB_0=1$.比较系数得$B_0=\frac{1}{2i}=-\frac{1}{2}i$，从而特解为$y^*=-\frac{1}{2}ix(\cos x+i\sin x)$.它的实部${y_R}^*=\frac{1}{2}x\sin x$就是后半部分的一个特解，

于是原方程的通解为$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x+\frac{1}{2}x\sin x$.

（注：这里在求$y''+y=\cos x$的特解时也可以直接设$y^*=x(C_1\cos x+C_2\sin x)$）

(4)解：对应的特征方程为$\lambda^2+\mu=0$.对μ的正负分情况讨论：

（1）当$\mu<0$时，特征根为$\lambda_1=\sqrt{-\mu},\lambda_2=-\sqrt{-\mu}$.故通解为$y=C_1e^{\sqrt{-\mu}x}+C_2e^{-\sqrt{-\mu}x}$.

（2）当$\mu=0$时，通解为$y=C_1+C_2x$.（3）当$\mu>0$时，特征根为$\lambda_1=\sqrt{\mu}i,\lambda_2=-\sqrt{\mu}i$.

故通解为$y=C_1\cos\sqrt{\mu}x+C_2\sin\sqrt{\mu}x$.

3、对应特征方程的根$\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=1$.从而特征方程为$(\lambda+1)^2(\lambda-1)=0$，即$\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1=0$. 故以$y_1,y_2,y_3$为特解的三阶常系数线性齐次微分方程为$y'''+y''-y'-y=0$.

4、将等式移项得$f'(x)=-f(x)+\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt$，显然等式右边在$[0,+\infty)$上可导，故$f'(x)$在$[0,+\infty)$上也可导。

令$x=0$得$f'(0)=-1$.等式两边同乘$(x+1)$得$(x+1)f(x)+(x+1)f'(x)=\int_0^x f(t)dt$.

再两边求导得$(x+2)f'(x)+(x+1)f''(x)=0$. 令$f'(x)=p$，则原方程化为$(x+2)p+(x+1)\frac{dp}{dx}=0$.

$p\neq 0$时$\frac{dp}{p}=-\frac{x+2}{x+1}dx$. 两边积分得$p=\frac{1}{C(x+1)e^x}$.代入$p(0)=-1$得$p=f'(x)=-\frac{1}{(x+1)e^x}$.

由于$f'(x)<0$恒成立，故$f(x)\leqslant f(0)=1(x\in[0,+\infty))$.

记$g(x)=f(x)-e^{-x}$，则$g'(x)=f'(x)+e^{-x}=\frac{xe^x}{x+1}\geqslant 0$恒成立，$g(x)\geqslant g(0)=0$，即$f(x)\geqslant e^{-x}$.

故$e^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$.

5、用常数变易法，求得原方程的通解为$e^{-ax}[\int_0^x f(t)e^{at}dt+C]$.由于$f(x)$在$[0,+\infty)$上有界，设$|f(x)|\leqslant M$，则当$|f(x)|\leqslant M$时，$y=e^{-ax}[\int_0^x f(t)e^{at}dt+C]$

$$|y|=\left|e^{-ax}[\int_0^x f(t)e^{at}dt+C]\right|\leqslant\left|Ce^{-ax}\right|+e^{-ax}\left|\int_0^x f(t)e^{at}dt\right|\leqslant|C|+\mathrm{M}e^{-ax}\int_0^x e^{at}dt$$
$$=\frac{M}{a}(1-e^{-ax})+|C|\leqslant|C|+\frac{M}{a}$$

故微分方程的解在$[0,+\infty)$上有界。

6、(1)由从小孔流出的液体的体积与瓶中减少的体积相同的关系，建立 h关于

t的微分方程：$-\pi\cdot(\frac{0.01}{2})^2\cdot vdt=\pi(\frac{1}{2})^2dh$，代入$v$并化简得$\frac{dh}{\sqrt{h}}=-c\cdot 10^{-4}\cdot\sqrt{2g}\cdot dt.$

两边积分，并代入初值条件$h(0)=2$得$\sqrt{h}=-\frac{c}{2}\cdot 10^{-4}\cdot\sqrt{2g}\cdot t+\sqrt{2}.$

令$h=0$，得$t=\frac{2\times 10^4}{c\sqrt{g}}.$

(2)设容器母线方程为$x=x(h)$，由（1）中方程同理，有$S\cdot c\cdot\sqrt{2gh\cdot}dt=\pi\cdot x^2(h)\cdot dh$（S为小孔的面积），得$\frac{dh}{dt}=\frac{Sc\sqrt{2gh}}{\pi x^2(h)}=v$（液面下降速度）。

故得$h=(\frac{\pi v}{Sc})^2\cdot\frac{x^4}{2g}$.即容器母线方程为$y=(\frac{\pi v}{Sc})^2\cdot\frac{x^4}{2g}$.

7、设曲线方程为$y=f(x)$，由面积关系可列方程$\int_0^x f(t)dt=\frac{1+f(x)}{2}x+x^3$，化简得$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=-\frac{1}{x}-6x$，为一阶线性微分方程。

先求齐次方程的解，得$y=Cx$.再将C改为关于x的函数并代入原方程，得$y=1-6x^2+\tilde{C}x$，再将点$(1,0)$代入，得曲线方程为$y=-6x^2+5x+1$. $S_1=\frac{y^2(x_0)}{2y'(x_0)}$ 8、点(x_0,y_0)处的切线方程为$y=y'(x_0)(x-x_0)+y(x_0)$，令$y=0$得$x=x_0-\frac{y(x_0)}{y'(x_0)}$.故$S_1=\frac{y^2(x_0)}{2y'(x_0)}$.

由$2S_1-S_2=1$可列出方程$\frac{y^2(x)}{y'(x)}-\int_0^x y(t)dt=1$.令$x=0$可得初值条件$y^2(0)=y'(0)=1$.两边求导并化简得$yy''=(y')^2$.

令$y'=p$，则原方程可化为$p=y\frac{dp}{dy}$.积分并代入初值条件得$p=y$.再次积分并代入初值条件，得$y=e^x$.